1 Probabilités-Rappel

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
Lancer ce dé et noter le nombre inscrit sur la face supérieure du dé est une expérience dont on ne peut prévoir le résultat. On parle ***d'expérience aléatoire***.
Les différentes issues de l'expérience aléatoire s'appellent des **événements élémentaires**.
L'ensemble des événements élémentaires est appelé **univers**. On le note Ω.
Dans le cas du dé, on a : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ où on note 1 l'événement "On a obtenu la face numérotée 1".
On a card Ω= 6 ; ce qui signifie que le nombre d'éléments de Ω est 6.

Loi de probabilité sur un ensemble fini
On note $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ l'ensemble des événements élémentaires d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque événement e_i un nombre p_i (appelé probabilité de e_i) positif ou nul de telle façon que :

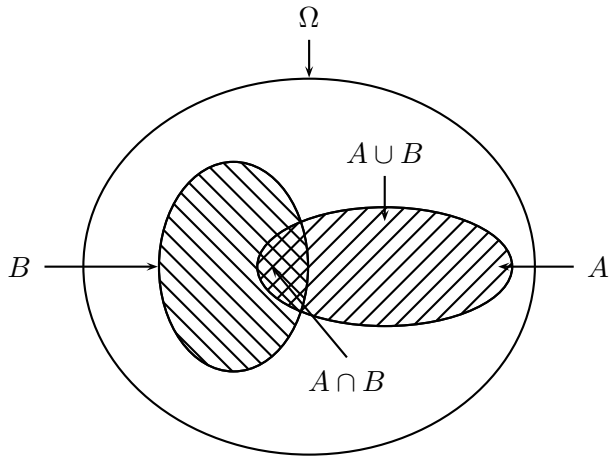
1. $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \cdots + p_n = 1$
2. La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires qui constituent A.

Exemple : A est "le chiffre obtenu est pair". On a : A=$\{2; 4; 6\}$ et P(A)= P(2)+P(4)+P(6)= $\frac{3}{6}$ (si le dé est parfait).
Remarque : **Modéliser** une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles. Choisir un modèle dépend des conditions de l'expérience.

Cas particulier essentiel : l'équiprobabilité
Il se peut que les conditions de l'expérience conduise à choisir un modèle où les événements élémentaires ont tous la même probabilité.
Il s'agit d'un modèle dit " **d'équiprobabilité**". Si card Ω = n , alors $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$.

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

2 Union - Intersection - Complémentaire



Expérience aléatoire :

On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On considère les événements A et B suivants :

A : "La carte est un valet, une dame, ou un roi"

B : "La carte est un pique".

On a alors :

Ω est l'ensemble des cartes du jeu de 32 cartes.

A $\cup$ B est l'ensemble des cartes qui sont un pique ou une figure.

A $\cap$ B est formé des trois cartes : Le valet de pique, la dame de pique et le roi de pique.

Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω.

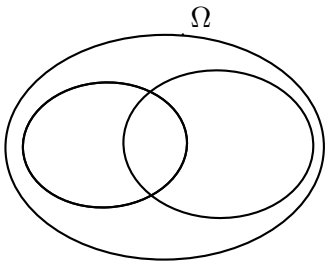
1. La probabilité de l'événement certain est 1 : P(Ω)=1.
2. La probabilité de l'événement impossible est 0 : P($\emptyset$)=0.
3. Si $A \subset B$ alors P(A) $\leqslant$ P(B).
4. P($A \cup B$)=P(A) + P(B) - P($A \cap B$).
5. Si A et B sont incompatibles (c'est à dire $A \cap B = \emptyset$) alors P($A \cup B$)=P(A) + P(B).
6. P($\bar{A}$)=1-P(A) ($\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A.)

3 Méthodes de dénombrement

3.1 Tableau à double entrée et diagramme

Un club sportif compte 200 adhérents, dont 160 pratiquent l'activité A et 60 pratiquent l'activité B. On considère l'expérience qui consiste à choisir au hasard un membre du club. Remplir le diagramme et le tableau avec les probabilités appropriées :

	B	$\bar{B}$	$Total$
A			
$\bar{A}$			
$Total$			200



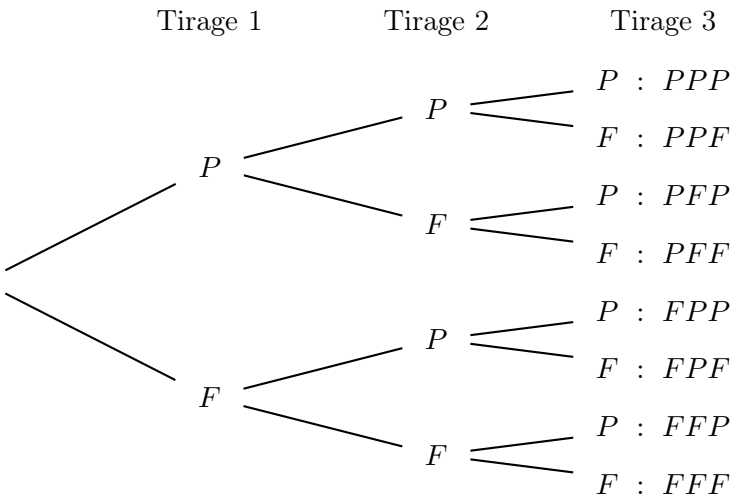
Exprimer à l'aide de A et B l'évènement C : « ne pratiquer aucune des activités » : .....

Calculer $P(C)$: .....

Remarque : Le nombre à l'intersection de la colonne A et de la ligne B est $P(A \cap B)$. Le total de la colonne A est le nombre $P(A)$. Enfin, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

3.2 Dénombrer avec un arbre

L'expérience consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie. On note le résultat sous la forme de trois lettres indiquant le résultat de chacun des trois tirages (par exemple, FPF signifie que l'on a obtenu face au premier tirage, pile au second et face au troisième). On modélise toutes les situations par un « arbre » :



Décrire par une liste l'évènement A : « obtenir deux piles ».
Calculer $P(A)$.

Décrire par une liste l'évènement B : « obtenir au moins un pile ». Décrire $\bar{B}$ et calculer $P(B)$.

3.3 Dénombrer par la « méthode des cases »

Lorsqu'une expérience est le résultat d'une succession d'expériences, on peut dénombrer le nombre d'issues favorables d'un évènement ou de l'univers en multipliant les nombres d'issues des experiences correspondantes :
Exercice : On tire de cartes, sans remise, au hasard dans un paquet de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire d'as ?

$\mathbf{\Omega}$: carte 1 $\boxed{32}$ × carte 2 $\boxed{31}$ = total 992 issues. $\mathbf{A}$: As 1 $\boxed{4}$ × As 2 $\boxed{3}$ = total 12 issues

Donc $P(A) =$ .....

4 Variable aléatoire

Exemple :
On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
— Si on tire une carte rouge, on perd 1 euro.
— Si on tire une carte de pique, on gagne 2 euros.
— Si on tire une figure (Roi,Dame ou Valet) de trèfle, on gagne 5 euros.
— Si on tire une autre carte, on ne gagne rien mais on ne perd rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au "gain" d'une partie.

X prend les valeurs suivantes : -1, 0, 2, 5.

Définir la loi de probabilités de la variable aléatoire X c'est déterminer les probabilités des événements élémentaires "$X = -1$", "$X = 0$", "$X = 2$", "$X = 5$".
Les résultats se présentent en tableau de la sorte :

$X = x_i$	-1	0	2	5
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{3}{32}$

Espérance de la variable aléatoire
L'espérance aléatoire d'une variable aléatoire X se note $E(X)$ et se calcule ainsi :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad \text{où } p_i = \mathrm{P}(X = x_i).$$

Ne pas oublier que la somme des probabilités est égal à 1 : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Dans l'exemple : $E(X) = -1 \times \frac{16}{32} + 0 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{8}{32} + 5 \times \frac{3}{32} = \frac{15}{32}$.
Interpétation : $E(X)$ représente le gain moyen par partie si le joueur joue un très grand nombre de fois à ce jeu.

Variance et écart-type de la variable aléatoire
La variance d'une variable aléatoire X se note $V(X)$ et se calcule ainsi :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2 \qquad \text{où } p_i = \mathrm{P}(X = x_i).$$

On peut aussi l'écrire sous la forme suivante : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Formule de Konig-Huyghens)

L'écart-type se note σ et on a :

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

Dans l'exemple : $V(X) = \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{16}{32} + \left(0 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{5}{32} + \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{8}{32} + \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{3}{32} \simeq 3,61$; et $\sigma(X) \simeq 1,90$.

Exercice : On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On définit la variable aléatoire X du gain algébrique : On gagne 4 euros si la carte est un as, 2 euros si c'est une figure et on perd 1 euro pour toutes les autres cartes.

Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance $E(X)$ puis l'écart-type $\sigma(X)$.

Propriété
Soit X variable aléatoire. a et b sont deux réels.

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Exemple : Soit X une variable alétoire tel que $E(X) = -3$ et $V(X) = 4$.
Alors $E(2X - 7) = 2E(X) - 7 = -13$ et $V(2X - 7) = 2^2 V(X) = 16$.

5 Schéma de Bernoulli

5.1 Epreuve de Bernoulli

Définition
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire comportant deux issues (succès / échec). On note p la probabilité du succès.

Exemple :
On lance une pièce équilibrée. Il y a 2 issues possibles à cette expérience : pile(succès) ou face(échec)
C'est bien une épreuve de Bernoulli.

5.2 Schéma de Bernoulli

Définition
Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Exemple :
On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.
C'est un schéma de Bernoulli de paramêtres $n = 4$ et $p = 0,5$.

Remarques :
La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1.
La probabilité d'un événement est le produit des probabilités portées sur les branches du chemin aboutissant à cet événement.

Exercice :
On considère un schéma de bernoulli de paramètres $n = 2$ et $p = 0,8$.
Construire un arbre pondéré.

6 Loi binomiale

6.1 Variable aléatoire associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli

Définition
La probabilité d'obtenir k succès dans un schéma de Bernouilli de paramètres n et p est notée $P(X = k)$, où X est la variable aléatoire donnant le nombre de succès. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice :
On considère une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,6$.
Construire un arbre pondéré.

Exercice :
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,7$.

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
3. En déduire $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$

Correction :

Pour $P(X = 2)$, d'après l'arbre, il y a trois chemins comportant exactement 2 succès donc :
$P(X = 2) = 3 * 0,7^2 * 0,3 = 0,441$.

De meme pour $P(X = 3)$, d'après l'arbre, il y a 1 seul chemin comportant exactement 3 succès donc :
$P(X = 2) = 1 * 0,7^3 = 0,343$.

Alors $P(2 \leqslant X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,784$

Propriété

Formule générale : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Alors la probabilité $P(X = k)$ est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1-p)^{n-k}$$

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se lit "k parmi n" : il donne le nombre de chemins avec k succès dans un schéma de Bernoulli de paramêtres n et p.

Exemple :

Ainsi, $\binom{4}{2}$ est le nombre de chemins avec 2 succès dans un schéma de Bernoulli de paramêtres 4 et p quelconque. On utilise la calculatrice et on trouve : $\binom{4}{2} = 6$.

Exercice :

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,2$.

Calculer $P(X = 2)$.

Correction : $P(X = 2) = \binom{20}{2} * (0,2)^2 * (1-0,2)^{20-2} = 0,14$ à $0,01$ près.

6.2 Espérance, Variance, Ecart-type

Propriété

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n,p)$ est $E(X) = np$.
La variance d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $B(n,p)$ est $V(X) = np(1-p)$.

Exercice :

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Correction :

$E(X) = n * p = 10 * 0,3 = 3$ et $V(X) = n * p * (1-p) = 10 * 0,3 * (1-0,3) = 2,1$